ÉNONCÉ

- Soit $[a,b[$ intervalle de $\mathbb{R}$ (borné ou non, avec $a < b \leq +\infty$).

$\varphi : [a,b[\to \mathbb{R}$ C^2

$f : [a,b[\to \mathbb{C}$ telle que → cas $t_0 = 0$

→ $f \in L^1([a,b[)$

→ f conti en a et $f(a) \neq 0$.

Soit $F : t \mapsto \int_a^b e^{-x\varphi(t)} f(t)\,dt$.

Si $\varphi' > 0$ sur $]a,b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$, $F(t) \underset{t\to\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}}\ e^{-t\varphi(a)} \frac{f(a)}{\sqrt{t}}$

LEÇONS.

- 218
- 224 :
- 228 :
- 239 :

RÉFS.

[PGCD] Rouvière, petit guide du calcul diff p. 339-345

RÉSULTATS ASSOCIÉS

1. Sous les mêmes hyp sur f, si $\varphi' > 0$ sur $[a,b[$, $F(t) \underset{t\to\infty}{\sim} \frac{1}{\varphi'(a)}\ e^{-t\varphi(a)} \frac{f(a)}{t}$

2. APPLICATION : $\Gamma(t+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^t\,dx \underset{t\to\infty}{\sim} t^{t+1} e^{-t} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{t}}$

3. th. prolongement dérivée

4. $f : I \to \mathbb{R}$ strict monotone, conti. f bijection de $I \to \overbrace{f(I)}^{\text{m̂ nature que } I}$ d'inv f^{-1} conti strict monotone de m̂ sens var que f.

DÉMO

///: à l'oral.
/// écrit au tableau.
///: pour comprendre.

Comme annoncé plan, je traite le cas $t_0=0$ ie f Sable. En fait peut tjrs s'y ramener

$F : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \int_a^b \underbrace{e^{-x\varphi(t)} f(t)}_{g(t,x)} dt$ est bien définie

car $|e^{-t\varphi(x)} f(x) \mathbb{1}_{[a,b]}(x)| \leq \underbrace{e^{-t\varphi(a)}}_{\text{indé de } x.} \underbrace{|f(x)|}_{\in L^1.}$

BUT : $\sqrt{x} F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\varphi''(a)}} \; e^{-t\varphi(a)} f(a).$

PLAN :

① preuve pour $\varphi : x \mapsto x^2$, $a=0$

② cas général.

① On va séparer Sable en 2 pr isoler vois 0. car $e^0 = 1$: on perd t !

Mais où séparer ?

On va choisir un vois où f est majorée pr appli TCO.

f est continue en $a=0$ (localement bornée) donc $\exists M>0$, $\alpha \in]0,b[$ tels que $\forall x \in [0,\alpha[$, $|f(x)| \leq M$.

$$\sqrt{x}\, F(x) = \underbrace{\int_0^\alpha \sqrt{x}\, g(x,t)\, dt}_{F_1(x)} + \underbrace{\int_\alpha^b \sqrt{x}\, g(x,t)\, dt}_{F_2(x)}.$$

use que $x>\alpha$ pr la majo.

- $|F_2(x)| = \left|\int_\alpha^b \sqrt{x}\, e^{-xt^2} f(t)\, dt\right| \leq \sqrt{x}\, e^{-x\alpha^2} \underbrace{\int_0^b |f(t)|\, dt}_{<+\infty} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

- $F_1(x) = \int_0^\alpha \sqrt{x}\, e^{-xt^2} f(t)\, dx.$

ici si $x \geq 0$, $\sqrt{t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ... et aussi : je veux faire app $f(0)$: CV.

CV : $\begin{cases} y = \sqrt{x}\, t \\ dy = \sqrt{x}\, dt \end{cases}$ → naturel.

$$F_1(x) = \int_0^\infty \underbrace{e^{-y^2} f\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) \mathbb{1}_{[0,\sqrt{x}\alpha[}}_{h(y,t)}\, dy.$$

Et $|h(y,x)| \leq M e^{-y^2} \in L^1(\mathbb{R}_+)$.

. $h(y,x) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-y^2} f(0) \mathbb{1}_{y\geq 0}$ $\forall y \in \mathbb{R}$.

ou plutôt TCO + caract séq car param continu

Par le TCO, $F_1(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^\infty e^{-y^2} f(0)\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} f(0)$ Sable de Gauss.

Donc $F(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\underbrace{\varphi''(0)}_{=2}}}\, f(0)\, \frac{1}{\sqrt{x}}$

$(x^2)' = 2x$
$(x^2)'' = 2$.

potentielle translat

(2). On veut se ramener au 1er cas : donc un CV $\approx y^2 = \varphi(x) - \varphi(a)$

Mais ⚠ il nous faut un C^1 difféo !

On pose en fait :

Posons $\delta : \begin{cases} [a,b[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)} \end{cases}$

δ est bien définie car $\varphi' > 0$ sur $]a,b[$ donc φ est croissante (donc $\varphi(x) \geq \varphi(a)$ si $x > a$)

Mq δ est un C^1 difféo

• δ est C^1 sur $]a,b[$ par composition.

⚠ dérivée : elle doit ê > 0.

si $x > a$

• $\forall x \in]a,b[,\ \delta'(x) = \dfrac{\varphi'(x)}{2\sqrt{\varphi(x) - \varphi(a)}} > 0$

si $x \to a$ On utilise le théo de la lim de la dérivée : on fait un DL.

On a : • $\varphi(x) = \varphi(a) + \underbrace{\varphi'(a)(x-a)}_{=0} + \dfrac{\varphi''(a)(x-a)^2}{2} + \underset{x \to a^+}{o}(x-a)^2$

• $\varphi'(x) = \overbrace{\varphi'(a)}^{=0} + \varphi''(a)(x-a) + \underset{x \to a^+}{o}(x-a)$

Donc $\delta'(x) \underset{x \to a}{\sim} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(x-a)\varphi''(a)}{\sqrt{\dfrac{(x-a)^2 \varphi''(a)}{2}}} \right) \sim \sqrt{\dfrac{\varphi''(a)}{2}}$

Du théorème de prolongement de la dérivée, $\delta'(a) = \sqrt{\dfrac{\varphi''(a)}{2}} \overset{(*)}{} > 0$ par hyp.

→ strict monotone donc injective

δ est C^1, $\delta' > 0$ sur $[a,b]$ ⇝ Par le TIL (global)

→ ne s'annule pas.

Donc δ est un C^1 difféo de $[a,b]$ dans $\delta([a,b]) = [0, \underset{\in \mathbb{R}^+}{c}]$

↳ en dim $= 1$, C^1 difféo c'est juste C^1 et strict monotone.

Notons ψ sa inverse.

CV : $\begin{cases} y = \delta(x) \iff x = \psi(y) \\ dx = \psi'(y)\,dy. \end{cases}$

$F(t) = e^{-t\varphi(a)} \displaystyle\int_0^c e^{-ty^2} \underbrace{f(\psi(y))\,\psi'(y)}_{g(y)}\,dy$

$\psi(0) = a$; $\psi'(0) = \dfrac{1}{\delta'(\psi(a))} \overset{(*)}{=} \sqrt{\dfrac{2}{\varphi''(a)}}$ formule dérivée de l'inv $\quad (f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$

$g(0) = f(a)\sqrt{\dfrac{2}{\varphi''(a)}} \neq 0$ car $f(a) \neq 0$.

$g \in \underbrace{C^0([0,c])}_{\text{compo fact } C^1} \cap \underbrace{L^1([0,c])}_{\text{th CV}}$

Par le cas précédent, $F(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} e^{-t\varphi(a)} \dfrac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2t}} f(a) \sqrt{\dfrac{2}{\varphi''(a)}}$